Herhalingstentamen complexe analyse, 5 april 2004, 9:00-12:00 Examenhal

1. U is een open deelverzameling van het complexe vlak $\mathbf{C}$.
(a) Geef de definitie van: U is open in $\mathbf{C}$.
(b) Geef de definitie van: U is wegsamenhangend (pathwise connected).
(c) Geef de definitie van: U is enkelvoudig samenhangend (simply connected).
(d) Is $V := \{z \in \mathbf{C} | \ z \neq 0, 1\}$ open, wegsamenhangend, enkelvoudig samenhangend?

2. Hoe is de convergentiestraal r van $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gedefiniëerd? Geef machtreeksen F met convergentiestraal r gelijk aan $0, 5, \infty$ respectievelijk.

3. Op welke deelverzamelingen $U \subset \mathbf{C}$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ absoluut uniform convergent? Van welke rationale functie f is $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ de machtreeks ontwikkeling in $z = 0$?

4. Bewijs dat voor $a > 0$ geldt $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}$. Welke stelling(en) gebruikt u? Zijn de voorwaarden wel vervuld? Hint: Voor $x \in \mathbf{R}$ is $x \sin x$ is het imaginaire deel van xe^{ix}.

5. F is de meromorfe functie $\frac{e^z-1}{z^2(z-1)^2}$.
(a) Bereken voor elk punt $a \in \mathbf{C}$ de orde van F in a.
(b) Heeft F een pool voor het punt $z = \infty$? Zo ja, wat is zijn orde?
(c) Bereken de eerste drie termen van de Laurent ontwikkeling van F in het punt $z = 1$.

6. Bewijs dat de functie $f(z) := \frac{z^2}{z^3-5}$ analytisch is in een omgeving van $z = 0$. Bereken expliciet de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die in een omgeving van $z = 0$ gelijk is aan $f(z)$. Bereken de convergentiestraal van die convergente machtreeks.

7. Laat U de open deelverzameling van $\mathbf{C}$ die verkregen wordt door het weglaten van de negatieve reeële as. Geef de formule voor de standaard complexe logaritme $\operatorname{Log} z$ op U. Bereken $\operatorname{Log}(i)$ en $(-i)^{-i}$.

8. Bewijs dat de volgende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^3}$ een meromorfe functie op $\mathbf{C}$ definieert. Bepaal de polen en hun ordes.

9. Waarom bestaat de oneigenlijke integraal $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{1+x^6} dx$? Bereken die integraal. Welke stelling (met voorwaarden) gebruikt u daarbij?